

ディラックと電子の振る舞い

元理化学研究所

橋爪 朗

hashizume-akira@h3.dion.ne.jp

Paul Adrien Maurice Dirac は大変ユニークな仕事を残している。しかし、量子力学の勉強をしていた頃、何の教科書か忘れたが、ディラックの “The Principles of Quantum Mechanics”¹⁾ は難しいから少なくとも高学年になってから読むようにという忠告が書いてあった。このため、この本は神田の古本屋で求めてあったものの白状すると何となく読みそびれ、拾い読みしかしてなかった。

理解できないで心の中に引っかかっていたものの一つに、電子の相対論的な波動方程式があった。たいていの教科書にはほとんどアプリアオ的に与えられており、何故そうなるか納得のいく説明がない。ただ、“ディラックによれば・・・” というだけで、私自身、人に説明する時も心苦しい説明しかできなかった。

毎日の実験やデータ整理に追われることもなくなって、改めて The Principles of Quantum Mechanics を何遍か読みとうして見て (以下簡単にテキストとよぶことにする)、彼自身がどのようにして電子に関する相対論的波動方程式を導入しているかを見てみると、背筋がぴりぴりするような驚きが幾つももあった。ここでは、簡単にそれを紹介してみたい。

1. 電子の相対論的波動方程式について

Schrödinger の表現で空間座標 x, y, z を x_1, x_2, x_3 で表すことにし、 ct を x_0 とする。運動量は $p_\mu = i\hbar\partial/\partial x^\mu$, ($\mu=0, 1, 2, 3$) である。古典力学で速く動く粒子のハミルトニアンは $H=c(m^2c^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{1/2}$ であるから、 $i\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi$ より

$$\left\{ p_0 - (m^2c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2} \right\} \psi = 0 \quad (1)$$

と表される。しかし Dirac は p_0 と p_1, p_2, p_3 が symmetric でないので、この式は相対論的に満足 of いく式ではないと述べている。例えば外場があるときに拡張しようとするとき具合がわるい。それで、この式に左から operator $\{p_0 + (m^2c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}\}$ を掛けて

$$\{p_0^2 - m^2c^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2\} \psi = 0 \quad (2)$$

とすると p_0, p_1, p_2, p_3 について対称に近くなり、相対論的に満足 of いく式がえられる。し

かしこれは逆に量子論的に満足のいくものではない。なぜなら量子論では p_0 が、つまり $\partial/\partial t$ が 2 乗の形式で入ってくるのは具合が悪い。そこで結局どうしたかという

$$\{p_0 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta\} \psi = 0 \quad (3)$$

のように $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ の係数を導入した。この式に再び $\{p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta\}$ を左から掛けると

$$\{p_0^2 - \sum [\alpha_1^2 p_1^2 + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) p_1 p_2 + (\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1) p_1] - \beta^2\} \psi = 0 \quad (4)$$

が得られる。従って、 $\alpha_1^2=1, \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1=0, \alpha_1 \beta + \beta \alpha_1=0, \beta^2=m^2 c^2$ (1, 2, 3 は循環させる)、などとすれば(2)式と同様な式がえられ、これが求めている式とした。

β はさらに $\beta=\alpha_m mc$ とおきかえて、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ および α_m が

$$\alpha_1 = \rho_1 \sigma_1, \alpha_2 = \rho_1 \sigma_2, \alpha_3 = \rho_1 \sigma_3, \alpha_m = \rho_3$$

を満足すれば、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ は

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。(3)式は

$$\{p_0 - \rho_1(\sigma, \mathbf{p}) - \rho_3 mc\} \psi = 0 \quad (5)$$

と表される。これが外場のないときの電子の相対論的波動方程式で、相対論と量子論が始めて結びついた式でもある。ここでもう一つ驚くべきことは Dirac が導入した定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は ‘They describe some new degree of freedom, belonging to some internal motion in the electron’ と書いているが結局電子のスピンを現すことになる。つまり、電子のスピンは電子の相対論的波動方程式を求めるために不可欠のものであったことである。逆にいえば電子のスピンは相対論的波動方程式の対象性を保つために自然が用意したものであることがわかる。

外場があるときの方程式は古典電磁気論でも行われる方法、つまり、 $\mathbf{p}$ を $\mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}$ に置き換えればよい ($\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャル)。つまり、

$$\left\{ p_0 + \frac{e}{c} A_0 - \rho_1 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) - \rho_3 mc \right\} \psi = 0 \quad (6)$$

とすればよい。これが外場があるときの方程式である。この式が Lorentz 変換に対して不変であることはテキストで証明されている。

古典的式と対応を良くするために、上式に $(p_0 + (e/c)A_0) + \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}) + \rho_3 mc$ を左から operate すると、 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{A}$ のベクトル積から $(i\hbar e/c)\text{rot}\mathbf{A} = (i\hbar e/c)\mathbf{H}$ の項や電場 $\boldsymbol{\varepsilon}$ に関する項が出てきて、

$$\left\{ \left(p_0 + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 - \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - m^2 c^2 - \frac{\hbar e}{c} (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) + i\rho_1 \frac{\hbar e}{c} (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) \right\} \psi = 0 \quad (7)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ と $\mathbf{H}$ あるいは $\boldsymbol{\varepsilon}$ との coupling の項がでてくる。

ゆっくり動く電子で全体のハミルトニアンを $H = mc^2 + H_1$ とし、 H_1 が mc^2 に比較して小さいとき $H_1 + eA_0$ には $(\hbar e/2mc)(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H})$ の項がでてきて、ちょうど Zeeman 効果の splitting を説明でき、電子は $(\hbar e/2mc)\boldsymbol{\sigma}$ の magnetic moment を持っていることと一致する。また、電子は $(1/2)\hbar\boldsymbol{\sigma}$ の spin angular momentum を持っていることがでてくる。

Text にも少しばかり触れられているが、ここで、何故 $(1/2)\hbar$ の spin しかでてこないかが問題である。Dirac は $(1/2)\hbar$ の spin を持つ粒子がより基本的粒子と少なくとも一時は考えたようである。しかし、これは後で Pauli と Weisskopf により spin が零の粒子について相対論的量子理論が可能であることが示された。

2. 負のエネルギー

(6)式ではエネルギー $\mathbf{c}\mathbf{p} + e\mathbf{A}$ について負のエネルギーが可能である。これは量子論と結びつけられていない古典的相対論(1)式でも同じことがいえる。しかし、古典論で致命的な欠陥にならないのは、解が連続的で mc^2 のギャップを飛び越えることができない。従って理論の本質的な欠陥にはならないということである。一方、量子論では遷移が不連続なエネルギー状態で起きるから、正負間で遷移がおこる可能性があり、負のエネルギーを無視するわけにはいかない。このことから、Dirac は反粒子（今の場合は positron）の存在を考えた。くだんのテキストには1章をさいて、明瞭に負のエネルギーを持つ positron、hole として存在する positron の存在が指摘されている。いったいこの大胆さはどこからきているのだろうか。彼は物理の philosophy に関して、別のところで、‘Physical laws should have mathematical beauty’ と述べている。

3. おわりに

Dirac はフランス語の教師の家に 1902 年に生まれ、Bristol の大学で電気工学を修めて

から 1923 年 Cambridge の大学院に進んだ。Schrödinger と共に 1933 年にノーベル賞を受けたにも拘らず日本ではその仕事や生涯は通俗的にはあまり知られていない。彼は一般向けの本を殆んど書かなかったし、彼のいるところ数学ありで、一般の人にとってとっつきにくい人だったのだろう。しかし、1930 年の反粒子の予言は大胆きわまりないものである。また、多分秀才タイプであまり逸話がない。彼はまた一般相対性理論に没頭し、重力場の問題などに取り組んだ。これに関しては、文献 2) の末尾に訳者が詳しい解説と、文献を紹介している。彼は 1984 年に亡くなった。朝日新聞だったか、僅か数行の小さな死亡記事が載せられていたのを覚えている。δ関数、bra- and ket-vector、ポワソンブラケットを用いた量子化の方法など、量子力学で普遍的な手法を開発しているので、ずいぶん昔の人のように思えるが、湯川秀樹よりわずか 5 歳年上で殆ど同時代を生きた人でもある。Cambridge 大学 (St John's College) では 1986 年彼を偲んで講演会が開かれている。そこで、講演者の一人 R.P. Feynman が若かりし頃 Dirac を英雄として尊敬していたことが述べられている。そして、Feynman は Dirac の particle creation や annihilation、スピンと統計などについて、さらに進んだ概念と手法を発展させたのである。

Dirac のテキストは Oxford University Press から出版されているが、Oxford の町の本屋でも学生用の簡易表紙のテキストが並んでいた。多分 Oxford 大学でも物理の学生は、今でもこの古典を良く勉強しているにちがいない。喧噪が支配している日本の都会と対比的な静かな緑の学園の町と共に、ここで勉学に励む学生を大変うらやましく思った。

電子についての相対論的量子論の方程式など核データとはあまり関係がないと思っていたら、 ^{127}I の第一励起準位の quadrupole moment について、従来、核データで参照していた値とかなり異なる値が報告されていて、少なくともこれについては、今まで採用していた値を変更した方がよさそうである。Quadrupole moment については Dirac の式のハミルトニアンについて、自己場の影響など各種の補正が必要で、原子核全体にわたって systematic な取り扱いをしなければならない。その理解のためにも Dirac のテキストや Heitler の The Quantum Theory of Radiation などが役に立っている。

References

- 1) P.A.M. Dirac: “The Principles of Quantum Mechanics”, Oxford University Press 1st edition (1930), 2nd edition (1935), 3rd edition (1947), 4th edition (1958).
- 2) P.A.M. Dirac: “General Theory of Relativity”, John Wiley & Sons, Inc. (1975)
翻訳 江沢 洋: “ディラック一般相対性理論” 東京図書 第 7 刷(1997).