

未知変形パラメータの決め方 — 換算遷移確率との関係について —

(1986年9月18日受理)

CRC 岸田 則 生

原子炉材料の放射線損傷や誘導放射能の評価の目的のために、4年前よりガス生成核データ評価ワーキング・グループが結成され、評価活動が続けられている。ガス生成中性子核反応は、主に数MeV以上の高いエネルギーの入射中性子によって起こるので、その断面積の予測には通常の複合核反応過程の他に、直接反応過程や前平衡過程を考慮する必要がある。本コメントでは、放出中性子スペクトルの高エネルギー部分を評価する際に重要となる、直接過程による非弾性散乱の計算(DWBA法, CC法¹⁾)の中で使用される原子核の変形パラメータの決め方 — 特に非弾性散乱実験が存在しない場合 — の1方法について紹介する。

非弾性散乱を直接反応模型で解析する場合、原子核の励起機構は使用する核構造モデルにより、大きく2つに分けられる。1つは原子核を微視的に取り扱い、非弾性散乱は入射中性子と個々の核子が相互作用することによって引き起こされると考えるものである。もう1つは原子核の集団運動の巨視的モデルに基づいて、入射中性子が核の振動・回転運動を誘起すると考えるものである。後者の反応モデルで断面積を計算する時、いわゆる変形パラメータと呼ぶ値を必要とするが、評価したい核についての測定が無い場合もある。また、たとえ測定されていたとしても、入射粒子の種類やエネルギーによるばらつきがある場合もあり、評価計算でどの値を使用すべきかの指針が望まれる。幸い巨視的モデルの下では、非弾性散乱と電磁遷移(ガンマ崩壊、クーロン励起等)の相互作用の間に簡単な比例関係が存在し、励起状態の寿命より変形パラメータを求めることが可能である。今回、評価者の利便を考え、換算遷移確率より変形パラメータを求める簡便式を整理したので、以下に記すことにする。

1. 偶-偶球形核の表面振動励起

詳しくは原子核の教科書^{2),3)}を見ていただくことにして、本稿では関係式の導出に必要なエッセンスのみを記す。

球形核の励起モードのうち最も生じ易いのは表面振動で、これを非常に簡潔に表現するのが液滴模型である。この模型では核は明確な表面を持った体積一定の非圧縮性流体と仮定される。

実験事実より表面振動においては、平衡状態と変形状態との差は小さいと仮定してよいので、表面の形は集団座標 $\alpha_{\lambda\mu}$ を用いて空間固定座標系で

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{+\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \varphi) \right] \quad (1)$$

と展開される。図1に示すように、 $\lambda = 0$ は体積変化を伴う動径方向の伸縮運動なので、現在の仮定の下では考えない（実際は高い励起エネルギー領域に巨大共鳴として観測されている）。また、 $\lambda = 1$ も単なる球の並進運動なので、表面振動運動の対象とならない。結局、表面振動の対象となるのは $\lambda \geq 2$ の多重極振動である。

(1)式で表された変形に伴う表面振動を記述するハミルトニアンは、回転不変性と時間反転不変性、および $\alpha_{\lambda\mu}$ とその時間微分 $\dot{\alpha}_{\lambda\mu}$ が微小であることから、調和振動子型に書くことができ

$$H = \sum_{\lambda=2}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{+\lambda} \left[\frac{1}{2} B_{\lambda} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + \frac{1}{2} C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right] \quad (2)$$

で与えられる。ここで B_{λ} は質量パラメーター、 C_{λ} は復元力パラメーターとして知られている。

(2)式をBohr⁴⁾に従って量子化するために、共役運動量

$$\pi_{\lambda\mu} = B_{\lambda} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^*$$

を導入すると、ハミルトニアンは(2)式から

$$H = \sum_{\lambda\mu} \left[\frac{1}{2 B_{\lambda}} |\pi_{\lambda\mu}|^2 + \frac{1}{2} C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right] \quad (3)$$

と書かれる。このハミルトニアンは、振動数 $\omega_{\lambda} = \sqrt{C_{\lambda}/B_{\lambda}}$ を持った調和振動子の集りを表している。

表面振動の量子化は、 $\alpha_{\lambda\mu}$ と $\pi_{\lambda\mu}$ の間に交換関係

$$[\alpha_{\lambda\mu}, \pi_{\lambda'\mu'}] = i\hbar \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \quad (4)$$

を設定すれば達成されるが、通常は生成・消滅演算子 $b_{\lambda\mu}^+$ と $b_{\lambda\mu}$ を導入して、次のように書き直す。

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda\mu} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2B_{\lambda}\omega_{\lambda}}} [b_{\lambda\mu}^+ + (-1)^{\mu} b_{\lambda-\mu}] \\ \pi_{\lambda\mu} &= \sqrt{\frac{\hbar B_{\lambda}\omega_{\lambda}}{2}} [(-1)^{\mu} b_{\lambda-\mu}^+ - b_{\lambda\mu}] \end{aligned} \quad (5)$$

(4)式から $b_{\lambda\mu}^+$ 、 $b_{\lambda\mu}$ はボソンの交換関係

$$[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda'\mu'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}, [b_{\lambda\mu}^+, b_{\lambda'\mu'}^+] = 0 \quad (6)$$

を満たす。すなわち、表面振動の量子はBose粒子である。我々はこの量子を通常フォノンと呼びならわしている。基底状態 $|0\rangle$ はフォノンが1個も存在しない状態

$$b_{\lambda\mu} |0\rangle = 0$$

として定義される。

2^λ 極の零点振動の全振幅を Bohr に従い β_λ と記すと、その定義より

$$\beta_\lambda = \sqrt{\langle 0 | \sum_\mu |\alpha_{\lambda\mu}|^2 | 0 \rangle} = \sqrt{\frac{(2\lambda+1)}{2B_\lambda \omega_\lambda}} \quad (8)$$

である。この β_λ を用いて(5)式の $\alpha_{\lambda\mu}$ を書き直すと

$$\alpha_{\lambda\mu} = \frac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}} \left[b_{\lambda\mu}^+ + (-1)^\mu b_{\lambda\mu} \right] \quad (9)$$

を得る。CC や DWBA の解析では、通常この β_λ を変形パラメーターと呼んでいる。しかし、(8)式の定義から分るように、偶-偶振動核の β_λ は変形の度合を表しているわけではない。

表面振動による励起状態は、基底状態にフォノンの生成演算子 $b_{\lambda\mu}^+$ を繰返し作用させることで得られる。例えば、 2^λ 極のフォノン数が N 、角運動量が L 、その Z 成分が μ の状態は、

$$|\lambda; N=1, L=\lambda, L_z=\mu\rangle = b_{\lambda\mu}^+ |0\rangle$$

$$|\lambda; N=2, L, L=L_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda \mu \lambda' \mu' | L L_z) b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda'\mu'} |0\rangle$$

等である。また、 N フォノン状態のエネルギーは基底状態より測れば $N\hbar\omega_\lambda$ であり、それらの準位間隔は全て $\hbar\omega_\lambda$ である。図2に、 $\lambda=2$ と $\lambda=3$ の場合のエネルギー・スペクトルを示す。多くの球形核でこのタイプのスペクトルが観測されているが、2フォノン状態の縮退は解けて測定されるのが普通である。すなわち、液滴模型による表面振動の記述は、すでに2フォノン状態ですら近似的にしか成立してないことに注意する必要がある。

1) 非弾性散乱による表面振動の励起

入射粒子のエネルギーが、表面振動状態準位の励起エネルギーを越えると、入射粒子と核内核子間の核力による相互作用で核に表面振動が起こる。入射粒子と表面振動の相互作用は、入射粒子が感ずる核の一体ポテンシャル、すなわち光学ポテンシャル U が、表面振動によって(1)式と同じ変形を受けることによって生ずると考える。 U としては文献1の(3)式が一般的に用いられる。表面振動では $\alpha_{\lambda\mu}$ を微小としてよいので、 U を $\alpha_{\lambda\mu}$ で展開すると入射粒子の感ずる一体ポテンシャルが得られる。すなわち、

$$U(r, R(\theta, \varphi)) = U(r, R_0) + R_0 \left[\sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \varphi) \right] \left(\frac{dU}{dR} \right)_{R=R_0} + \dots$$

である。第1項が弾性散乱を生ずる通常の光学ポテンシャル、第2項以下が非弾性散乱を引き起こす相互作用 V で

$$\begin{aligned} V &= U(r, R(\theta, \varphi)) - U(r, R_0) \\ &= V^{(1)} + V^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

$$V^{(1)} = \left[R_0 \left(\frac{dU}{dR} \right)_{R=R_0} \right] \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* (\theta, \varphi)$$

$$V^{(2)} = \frac{R_0^2}{2!} \left(\frac{d^2U}{dR^2} \right)_{R=R_0} \left[\sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* (\theta, \varphi) \right]^2$$

である。

上式より、非弾性散乱を起こす相互作用 V は $\alpha_{\lambda\mu}$ を含む、すなわち β_λ 依存することが分る。このために非弾性散乱の評価計算では、使用する変形パラメーターの値の決定がクリティカル・ポイントになる。

2) 電気多重極遷移によるフォノンの生成・消滅

フォノン状態、すなわち表面振動は、荷電粒子のクーロン励起によっても起こる。その励起状態は γ 線を放出して基底状態に戻る。この過程を記述する電気多重極モーメントは、長波長近似を行った後は

$$M(E, \lambda, \mu) = \int r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \rho_e(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (10)$$

と表される。電荷が核内に一様に分布していると仮定すると、我々のモデルは、核表面がシャープで体積一定だから、電荷分布は常に、

$$\rho_e(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Ze}{\frac{4\pi}{3} R_0^3} & \text{核内} \\ 0 & \text{核外} \end{cases} \quad (11)$$

で与えられる。(1)式を(10)式に代入して積分を実行し、 $\alpha_{\lambda\mu}$ の一次まで残す近似を行うと

$$M(E, \lambda, \mu) = \frac{3}{4\pi} Ze R_0^\lambda \alpha_{\lambda\mu}$$

$$= \frac{3}{4\pi} Ze R_0^\lambda \frac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}} \left[b_{\lambda\mu}^+ + (-1)^\mu b_{\lambda-\mu} \right] \quad (12)$$

が得られる。液滴模型によらない一般的な議論からは、次式で定義される有効半径 R

$$R = \left[\frac{\lambda+2}{3} R_0 \langle r^{\lambda-1} \rangle \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\left. \begin{aligned} \langle r^n \rangle &= \frac{\int r^n \rho_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\int \rho_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

を R_0 の代わりに用いるなら、核表面がぼやけている場合でも(12)式が成立することが分る

ている。

(12式)から分るように、電気多重極遷移もまた β_λ に比例する。この事実を利用すると、励起状態の寿命から β_λ を求めることが可能となる。もちろん相互作用の本質まで遡れば、非弾性散乱より求めた変形パラメーターは、強い相互作用による一体ポテンシャルの変形効果によるものであるのに対し、電磁遷移より求めた変形パラメーターは、電磁相互作用による電荷密度の変形効果によるものであるから、厳密に言えば両者が等しい必要はない。しかし、両者が良い近似で一致することは期待してよい。物理的観点からすると、我々は表面振動運動において、電磁多重極モーメントと粒子密度の多重極モーメントの間に、次の関係が成立すると仮定したことに相当する。

$$M(E\lambda, \mu) \approx \frac{Ze}{A} M(\lambda, \mu)$$

3) 励起状態の寿命と r 線換算遷移確率の関係

r 線の遷移確率は(12式)を始状態と終状態で挟んで積分すれば求まり

$$T_r(E\lambda; I_i \rightarrow I_f) = \frac{8\pi(\lambda+1)}{\lambda[(2\lambda+1)!!]^2} \frac{1}{\hbar} \left(\frac{E_r}{\hbar C}\right)^{2\lambda+1} \times B(E\lambda; I_i \rightarrow I_f) \quad (14)$$

で与えられる。ここで $B(E\lambda; I_i \rightarrow I_f)$ は r 線の換算遷移確率と呼ばれる量である。一般的な表式を書き下すのは少々面倒なので、我々が普段使用する1フォノン状態から基底状態への遷移のみを記すと、

$$B(E\lambda; I \rightarrow 0) = \left(\frac{3}{4\pi} Ze R_0^\lambda\right)^2 \frac{\beta_\lambda}{2\lambda+1} \delta_{\lambda I} \quad (15)$$

である。すなわち、 $B(E\lambda)$ を何等かの方法で求めれば変形パラメーターを決定できる。

励起状態の寿命は競合過程の崩壊確率の総和の逆数で与えられる。我々が考えている低励起状態では、 r 崩壊と内部転換過程のみを考慮すれば十分で

$$1/\tau = T_r + T_e = (1 + \alpha_{tot}) T_r$$

と書ける。 α_{tot} は内部転換係数と呼ばれる量で、 E_r が小さく、 Z が大きいと重要となるが、表面振動核では主として $E_r \gtrsim 1$ MeVなので、 $\alpha_{tot} = 0$ と置いて差支えない。内部転換係数は実験値がある場合には、それをそのまま使えばよいし、無い場合は数値表を使用すればよい、さらに厳密なことを言えば、 r 崩壊の磁氣的遷移の混合も考慮しなければならないが、フォノン状態間の遷移では通常無視できる。

Table of Isotopes では、寿命をlife time(τ)ではなく half time($t_{1/2}$)で表示し

ているので

$$t_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau = 0.693 \tau$$

なる関係と(14), (15)式より

$$B(E\lambda; I_i \rightarrow I_f) = \frac{\lambda [(2\lambda + 1)!!]^2}{8\pi(\lambda + 1)} \hbar \left(\frac{\hbar C}{E_\gamma} \right)^{2\lambda+1} \frac{0.693}{(1 + \alpha_{tot}) t_{1/2}} \quad (16)$$

が得られる。

我々がよく使用する, $2^+ \rightarrow 0^+$ と $3^- \rightarrow 0^+$ 遷移に対し(16)式を書き下せば, 次式が得られる。

$$B(E2; 2^+ \rightarrow 0^+) = \begin{cases} \frac{0.560}{E_\gamma (\text{MeV})^5 \cdot t_{1/2} (\text{ns}) \cdot (1 + \alpha_{tot})} e^{2f_m^4} \\ \frac{560}{E_\gamma (\text{MeV})^5 \cdot t_{1/2} (\text{ps}) \cdot (1 + \alpha_{tot})} e^{2f_m^4} \end{cases}$$

$$B(E3; 3^- \rightarrow 0^+) = \begin{cases} \frac{1.20 \times 10^6}{E_\gamma (\text{MeV})^7 \cdot t_{1/2} (\text{ns}) \cdot (1 + \alpha_{tot})} e^{2f_m^6} \\ \frac{1.20 \times 10^9}{E_\gamma (\text{MeV})^7 \cdot t_{1/2} (\text{ps}) \cdot (1 + \alpha_{tot})} e^{2f_m^6} \end{cases}$$

この $B(E\lambda)$ を(16)式へ代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= 9.37 \frac{\sqrt{B(E2; 2^+ \rightarrow 0^+)}}{Ze R_0^2} \\ \beta_3 &= 11.08 \frac{\sqrt{B(E3; 3^- \rightarrow 0^+)}}{Ze R_0^3} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となり変形パラメーターが求まる。核半径 R_0 の値は, 一般的には $12 \times A^{1/3}$ を用いればよいし, 正確を期すならば電子散乱より求めた(13)式のモーメントを使えばよい。

クーロン励起は γ 崩壊と逆反応関係にあるから

$$B_{CG}(E\lambda; 0 \rightarrow I) = (2I + 1) B_\gamma(E\lambda; I \rightarrow 0)$$

より換算遷移確率を求め, 変形パラメーターを計算すればよい。

(17)式から求めた変形パラメーターと, 非弾性散乱で決定した変形パラメーターが良く一致することは, 多くの核で検証されており, 普通は10%以内で一致している。

2. 偶-偶変形核の回転運動励起の場合

ある種の核は, 基底状態の形が球形から回転楕円体に変形していることが知られており, これらの核は変形核と呼ばれている。変形核の性質を議論する時には, 核が軸対称四重極変

形を起し核表面は

$$R(\theta', \varphi') = R_0 \left[1 + \beta_2 Y_{20}^*(\theta', \varphi') \right] \quad (18)$$

で与えられると考えるのが普通である。ただし、ここでの座標系は核の対称軸に固定した物体固定座標系である。

対称回転子の量子力学の一般論から、基底回転帯に属する単位間の換算遷移確率は

$$B(E2; I+2 \rightarrow I) = \frac{5}{32\pi} e^2 Q_0^2 \frac{(I+1)(I+2)}{(2I+3)(2I+5)} \quad (19)$$

で与えられる。ここで Q_0 は物体固定座標系における固有四重極モーメントであり、一様に帯電した剛体モデルでは

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5}\pi} Ze R_0^2 \beta_2 (1 + 0.36 \beta_2 + \dots) \quad (20)$$

で与えられる。 β_2 は大きくても 0.3 程度なので、第 2 項を無視しても差支えない。

非弾性散乱の計算でも振動核の場合と同様に、核の一体ポテンシャルが(18)式に従って変形していると考えるのが妥当であるが、変形核では β_2 が大きいので、相互作用ポテンシャルをテイラー展開することは許されず、ルジャンドル展開する必要があること、および物体固定座標系から空間固定座標系に変換しなければならないことは異なる。しかし、非弾性散乱の散乱振幅が(19)式の β_2 に比例することは証明できる。従って変形核の変形パラメーター（真の意味で変形パラメーターである）も電磁遷移の実験より Q_0 を求めて、(20)式を β_2 について解けば得られる。特に、 $2^+ \rightarrow 0^+$ 遷移では、振動核の(17)式と全く同じ表式になる。

3. 奇-A核の変形パラメーター

奇-A核についても、芯（偶-偶核）の集団運動と芯外核子の 1 粒子運動を結合させれば、(15)式や(19)式に対応する表式が得られるが、スピン・ファクターが複雑で使いにくいものとなる。集団運動は芯の励起に起因すると考えているので、芯外核子が集団運動に影響を与えないという断熱近似を用いれば、奇-A核の変形パラメーターには (A-1) 核の変形パラメーターを用いても良いことが結論される。従って、(17)式は便宜上、奇-A核でも使用できる。実験的な事実を述べれば、芯外核子のブロッキング効果のために、奇-A核の変形パラメーターは (A-1) 核のそれより幾分小さいのが普通です。

最後に本稿執筆を勧めて下さった NAIG の飯島俊吾氏に感謝致します。

参考文献

- 1) 五十嵐信一, 原田吉之助: 原子力学会誌, 22(4), 213; 22(5), 289(1980).

- 2) 高木修二, 他: 岩波講座現代物理学の基礎 10「原子核論」, p223(1973), 岩波書店
- 3) Bohr, A., Mottelson, B.R.: "Nuclear Structure", Vol. I, p325(1969), W.A.Benjamin.
- 4) Bohr, A.: Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 26, No 14(1952).

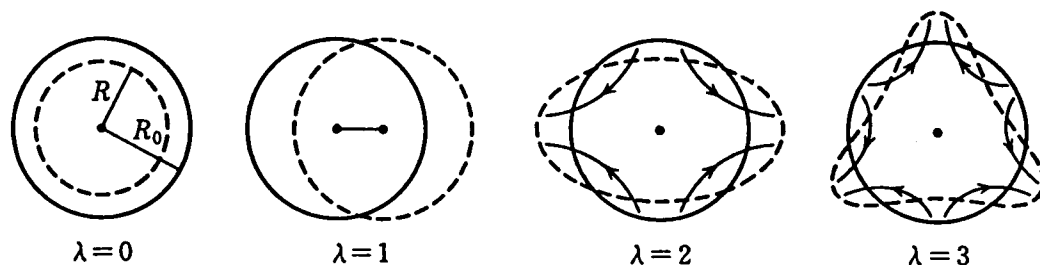


図1 核の液滴模型における表面振動 $\lambda \geq 2$ が実際に生ずる

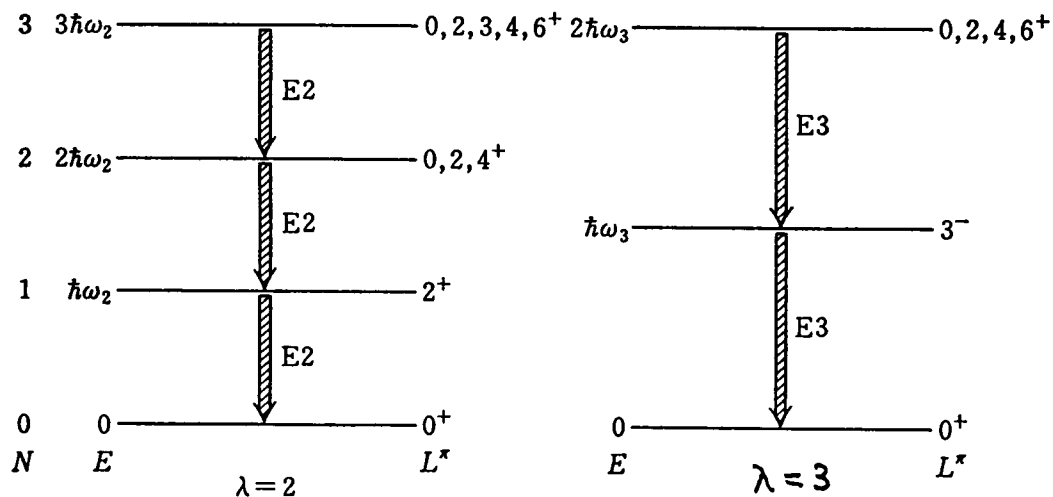


図2 4重極 ($\lambda=2$) 振動と8重極 ($\lambda=3$) 振動のエネルギー・スペクトル