



## 統計理論備忘録, III 原子核の準位密度

ロスアラモス国立研究所

河野 俊彦

[kawano@lanl.gov](mailto:kawano@lanl.gov)

### 1. はじめに

「統計理論備忘録」の第二章で少し触れたが、今回は原子核の構造の統計的性質である準位密度について解説する。統計理論を用いた原子核反応の計算では、個々の離散準位の物理的性質が正確に分からなくても、準位の密度という統計的な性質に置き換えることにより平均の反応断面積を知ることができる。準位密度は、光学模型で計算される粒子透過係数と並び、核反応断面積計算での要となる物理量である。

原子核には固有のエネルギーとスピン・パリティをもつ励起状態があり、励起準位のエネルギーがさほど高くなければ、その状態は実験によって比較的精度良く決定されている。例として Fig. 1 (a) に  $^{56}\text{Fe}$  の離散準位の構造を示している。このような原子核構造の評価済みデータは ENSDF (Evaluated Nuclear Structure Data File) に編集され、Table of Isotopes [1] や Nuclear Data Sheets などにまとめられている。

準位の分布には少々ムラがあるが、励起エネルギーが高くなるにつれて密になっていく。離散準位の位置そのものを理論で正確に予測することは不可能であるが、この密度の統計的な性質であれば調べることができる。いまスピン・パリティは無視し、励起エネルギーを今度は横軸にとり、それぞれの準位の番号を縦にとってみよう (Fig. 1 (b))。この準位の積み上げ図を見ると、どうやらあるエネルギーまでは指数関数的に増加しているらしい。

励起エネルギー  $E$  での準位密度を  $\rho(E)$  と書くと、Fig. 1 (b) は、ある励起エネルギー  $E_x$  まで  $\rho(E)$  を積分したものになっている。

$$N(E_x) = \int_0^{E_x} \rho(E) dE \quad (1)$$

図からこの  $N(E_x)$  が  $e^{\alpha E_x}$  の形をしているので、 $\rho(E)$  も同じ指数関数の形であろう。実際、この積み上げ図は  $\rho(E) \propto \exp((E-A)/B)$  という形を積分したものとして知られており [2]、それを破線で示している。5 MeV を超えると積み上げ図が直線からずれてくるのは、準位があまりに混み合ってきて、各々の離散準位を測定で判別できないためである。

このような準位の統計的性質には、密度分布の他にスピン・パリティ  $J^\Pi$  の分布もある。これらをまとめて準位密度を  $\rho(E, J, \Pi)$  と書いておく。Fig. 1 (a) には  $J^\Pi$  も併記しているが、

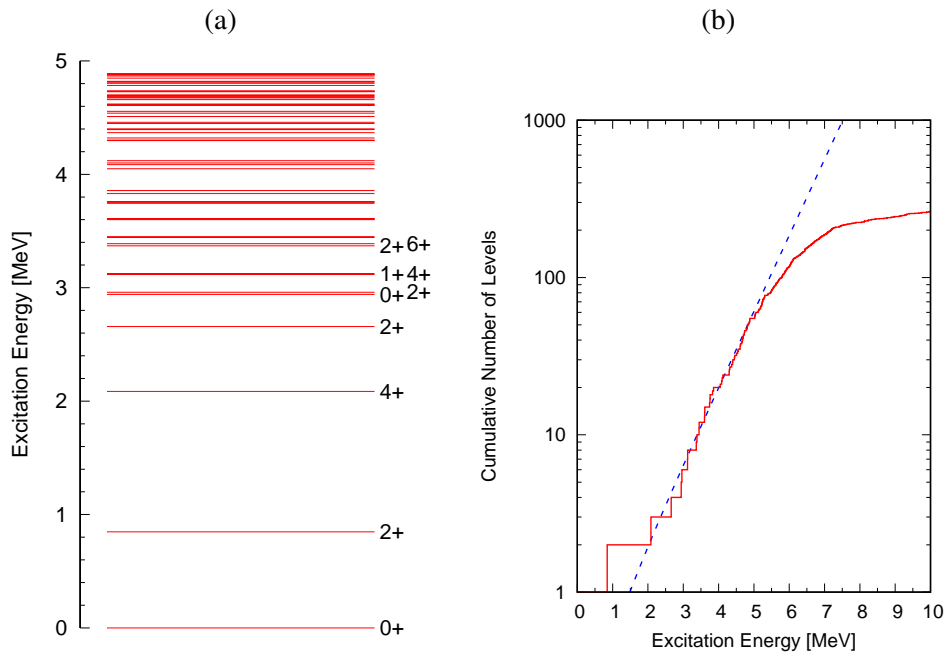


Fig 1 (a)  $^{56}\text{Fe}$  の励起準位とスピン・パリティ(最初の 10 本のみ)。 (b) 準位の積み上げ図。

励起エネルギーが上がるにつれてスピンの大きな準位が現れるようになってくる。準位の分布が核種や励起エネルギーによってどのように変化するかを調べれば、核反応断面積の推定の手がかりになる。準位密度に対するアプローチは、大雑把に言って現象論的に推定する方法と原子核構造計算を応用した微視的な方法ものがあるが、本稿では主に現象論に基づく原子核構造の統計的性質を簡単に解説する。

## 2. 組み合わせ法の考え方

### 2.1 一粒子状態と原子核の励起

原子核全体を一つのポテンシャルと考え、それに対して Schrödinger 方程式を解いて求まる固有状態が一粒子状態 (single particle state) である。一番深いところに  $0s_{1/2}$  軌道、その上に  $0p_{1/2}$ ,  $0p_{3/2}$  軌道というように原子核の殻構造が現れるのは多くの原子核理論の教科書に書かれているので詳細は省く。いま中性子と陽子を原子核のポテンシャルの底から順に詰めていき、一番最後の核子が入った軌道のすぐ上が Fermi 面である。球形核の代表である  $^{208}\text{Pb}$  の中性子の一粒子状態のエネルギーを Fig. 2 (a) の左側に示している。-15 MeV と -6 MeV 付近に現れるギャップが  $N = 82$  と 126 のマジックナンバーで、Fermi 面は -6 MeV 付近にある。-8 MeV 付近の軌道まで 126 個の中性子で埋まり、すぐ上の軌道は空である。 $^{208}\text{Pb}$  のような二重マジックナンバーの核は、このように典型的な殻構造 (shell structure) を示す。

核子を一粒子状態の Fermi 面まで詰めていった状態は、原子核の基底状態に相当する。原子核の励起状態とは、Fermi 面より下にある数個の核子を上の空いた軌道へ持ち上げ、元の場所に空孔ができた状態であると考えることができる。最も低い励起エネルギーの状態は、Fermi 面すぐ下の軌道にある核子一つを Fermi 面すぐ上の軌道へ持ち上げ、1 粒子-1 空孔 (1p-1h) の

対 (pair) の状態を作るものである。このような状態をインデックス  $\mu$  で表しておき、そのエネルギーは粒子と空孔の束縛エネルギー  $E_p, E_h$  の差 ( $E_\mu = E_p - E_h$ ) で与えられる。準位密度は、そのエネルギーで準位が一つ、つまりデルタ関数である。

$$\rho_\mu(E) = \delta(E - E_\mu) \quad (2)$$

Fig. 2 (a) の  $^{208}\text{Pb}$  の場合、 $N = 126$  のギャップが 3 MeV ほどあるので、一番低い離散準位はその程度の励起エネルギーとなると考えられる (実際には 2.61 MeV)。

Fig. 2 (a) のような一粒子状態の分布の密度も考えることができるが、この一粒子状態密度と準位密度は異なるものである。一粒子状態は、原子核のポテンシャルの中で核子が収まることのできる軌道であり、原子核の励起にかかわらず入れ物のサイズによって決定される。一粒子状態密度とは軌道がどれだけ密に分布しているかを表し、Fermi 面付近での平均的な密度  $g$  は、中性子と陽子に対して大雑把に  $N, Z/15 \text{ MeV}^{-1}$  程度である。中性子を 126 個含む  $^{208}\text{Pb}$  の中性子の場合、1 MeV 当たり軌道が 8 本程度あることになる。一方、準位密度  $\rho$  は、与えられた軌道の上に核子を配置する方法の数である。Fermi 面の下にある核子を上に移動する組み合わせ数は、動かす核子の数が増えるに従って膨大な数となる。ある励起エネルギー付近に含まれる組み合わせの総数が、謂わば準位密度となる。

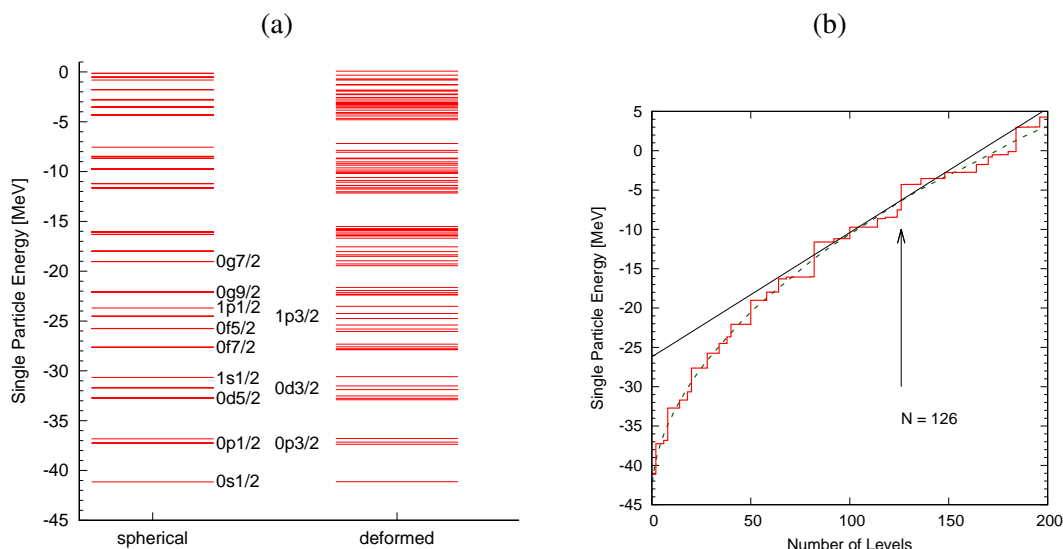


Fig 2 (a) は  $^{208}\text{Pb}$  の中性子の一粒子状態エネルギーと、それを少し変形させた場合のエネルギー。 (b) は一粒子状態を積み重ねた図。

## 2.2 組み合わせ計算による準位密度

より高い励起エネルギーを作るには、深い空孔状態と高い粒子状態の対を作るか、あるいは数個の対 ( $np$ - $nh$ ) を作る。一粒子状態の束縛エネルギーは変化しないと仮定すると、その様な状態のエネルギーは

$$E_\mu = \sum_i^n E_p^{(i)} - \sum_i^n E_h^{(i)} \quad (3)$$

となり、準位密度はやはりそのエネルギーでのデルタ関数 Eq. (2) となる。空孔と粒子状態  $\mu$  の組み合わせ (combination) を数え上げていけば、準位密度の手掛かりが掴めそうである。

簡単なモデルで考えてみよう。中性子と陽子の違いは無視し、核子が入れる軌道が等間隔に並んでいると考える。この様な核子の「座席」を Fermi 面の上下に配置したものを Fig. 3 の上段に示している。座席には Fermi 面側から番号を振っておこう。一粒子状態が座席の間隔  $D$  で並んでいるとすると、その密度  $g$  は座席間のエネルギー  $D$  の逆数なので、 $g = 1/D$  である。これは一粒子状態密度パラメータ (single particle state density parameter) と呼ばれる。

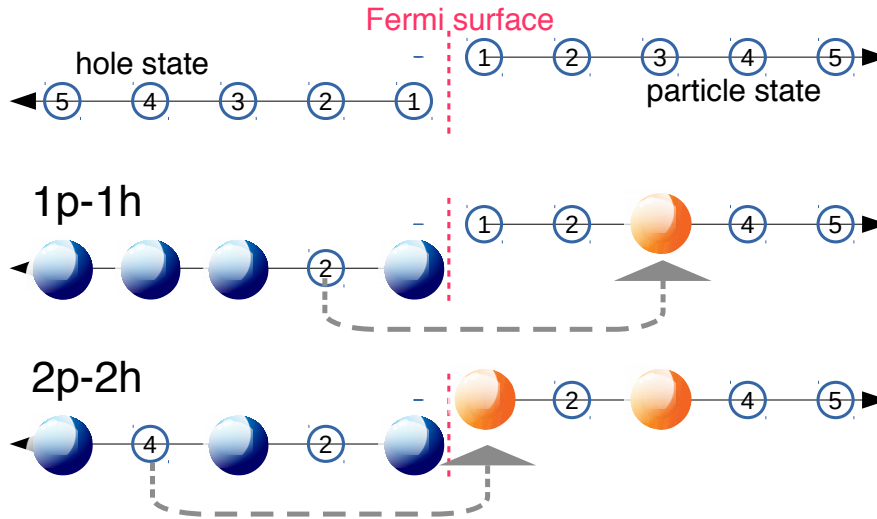


Fig 3 等間隔に一粒子状態が並んでいる場合の粒子-空孔励起。

原子核の基底状態は、空孔状態の座席が全て核子で埋まり、かつ粒子状態は全て空席の状態である。まず Fig. 3 の中段のように、2 番の空孔状態にある核子を粒子状態の 3 番の座席に持ち上げる。このエネルギーは  $E_p(3) - E_h(2)$  であり、そこに準位が一つだけ存在することになる。この 1 粒子と 1 空孔の組み合わせを全て数え上げれば、1p-1h 状態の部分準位密度  $\rho_1(E)$  が求まる。

次にもう一つ新しい対を作ろう。 $E_h(4)$  にある核子を  $E_p(1)$  の粒子状態へと持ち上げ、2p-2h 状態を作る。このエネルギーは  $E_p(1) + E_p(3) - E_h(2) - E_h(4)$  である。対を作る順序を入れ替え、 $E_h(4)$  と  $E_p(3)$  を先に作っても最終的なエネルギーは同一なので、これらは重複しないように数える。このような操作を繰り返して  $np-nh$  状態の部分密度  $\rho_n(E)$  を求め、それらの和を取ったもの  $\rho(E) = \sum_i \rho_i(E)$  が全準位密度となる。

空孔と粒子の状態  $N$  が 20 あるとし、6p-6h 状態までの総数を計算したものを Fig. 4 (a) に示している。 $D = 1$  とし、無次元の励起エネルギー並びに準位密度として計算している。1p-1h 状態の密度は、横軸 20 までは直線で増加するが、そこから先は  $N = 20$  の壁に当たって減少していく。同様に  $np-nh$  の密度は  $nN$  をピークとする対称分布となる。全ての和を取ったものが実線で示されている準位密度で、これも 120 をピークに減少に転じているが、これは単に  $N = 20, n = 6$  と切った計算上の都合の結果であり、実際にはさらに増加していくと考

えられる。

このようなモデルは単純化されすぎているであろうか。Fig 2 に示された  $^{208}\text{Pb}$  の一粒子状態のスペクトルは殻構造を強く示し、とても等間隔には見えない。しかし原子核が少し変形してくると状況は変わってくる。 $^{208}\text{Pb}$  を少しだけ変形させて一粒子状態のエネルギーを求めたものが、Fig. 2 (a) の右側に示されている。球形核では各々の軌道が  $nl_j$  の組で指定できたのに対し、変形核では一つの  $j$  の軌道が  $j + 1/2$  本に分裂する。個々の軌道を  $nl_j$  で表すことはできず、新しい量子数  $\Omega$  を導入する。Fermi 面付近の大きな  $j$  を持つ軌道は細かく  $\Omega = 1/2, 3/2, \dots, j$  に分離し、等間隔とまでは言えないまでもかなり密な分布となってくる。原子核の変形度を変化させて一粒子状態エネルギーがどう変わっていくかを表示すれば Nilsson ダイアグラムが得られる。

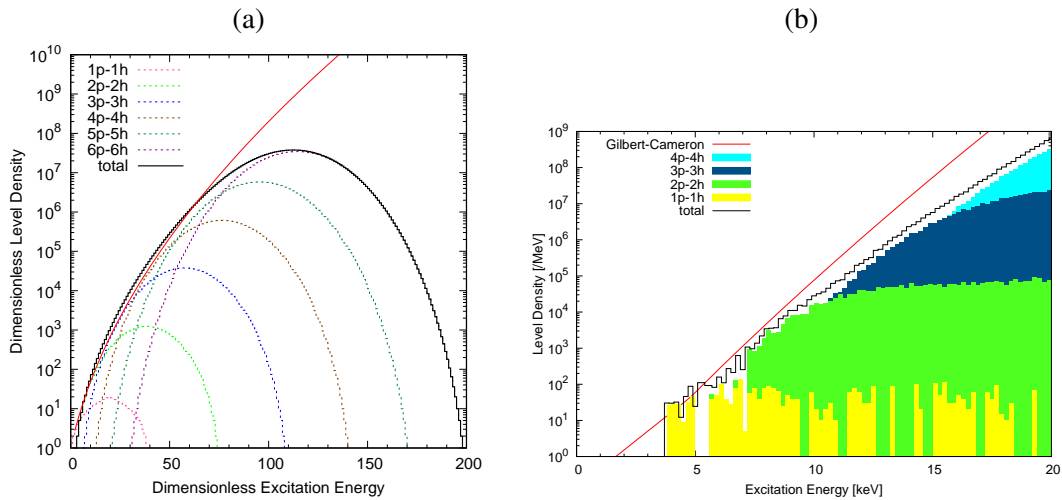


Fig 4 (a) 等間隔モデルを用いた粒子-空孔状態の準位密度 (点線) と、全準位密度 (黒の実線)。赤の実線は Fermi 気体モデルによる計算値。(b)  $^{208}\text{Pb}$  に対する現実的な一粒子モデルに基づいた部分準位密度と全準位密度。

実はこのような単純化された等間隔モデルで準位密度がどうなるかはコンピュータを使わなくても (少々煩雑ではあるが) 計算でき、Bohr-Mottelson の教科書 [3] に分配関数を用いた導出が与えられている。結果だけを示すと、

$$\rho(E) = \frac{1}{\sqrt{48E}} \exp\left(2\sqrt{aE}\right) \quad (4)$$

$$a = \frac{\pi^2}{6}g \quad (5)$$

となる。ここで  $a$  は準位密度パラメータ (level density parameter) である。この式で  $g = 1$  とした場合の結果も Fig. 4 (a) に示しているが、よく一致しているのが分かる。これが一番簡単な準位密度公式であり、Fermi 気体模型 (Fermi gas model) と呼ばれている。

$^{208}\text{Pb}$  の一粒子状態のエネルギーを横に並べると、Fig. 2 (b) の階段状の図が描ける。これを多項式で近似したものが破線で示されている。この破線と階段の不一致具合が、謂わば原子核が殻構造を作ろうとする強さ (shell energy) を示している [4, 5]。Fermi 面がある  $N = 126$  のところで多項式の接線を引いて傾きの逆数を求めると、一粒子状態密度パラメー

タ  $g = 6.3 \text{ MeV}^{-1}$  が求まり、Eq. (5) から  $a = 10.4 \text{ MeV}^{-1}$  となる。ここでは中性子による励起しか考えていないため、実際に観測される  $^{208}\text{Pb}$  の準位密度としては小さい。より現実的な一粒子状態を中性子と陽子に対して求め、全ての粒子-空孔励起状態の組み合わせを数え上げたものを Fig. 4 (b) に示す [6]。赤の実線は後で説明する現象論的なモデルで得られる準位密度であり、組み合わせ方法による準位密度はそれには及ばないものの、それなりに近い値を与えることが分かる。一般に 1p-1h の部分準位密度は殻の効果が強く出て、あまり均一に分布しない。部分的に準位がゼロになるのは、そのような励起エネルギーになる粒子-空孔の組み合わせが見つからないためである。現実的な一粒子状態を用いた計算とは言え、組み合わせ計算そのものは古典的な考え方であり、現実には 1p-1h 状態はさらに広く分布していると考えられる。

### 2.3 組み合わせの $J^\Pi$ 分布

現実の組み合わせ計算では、状態のスピン・パリティ  $J^\Pi$  についても考慮する必要がある。空孔状態の量子数が  $j_h^{\pi_h}$  で粒子状態が  $j_p^{\pi_p}$  のときの 1p-1h 状態のスピン  $J_\mu$  は、 $|j_h - j_p| \leq J_\mu \leq j_h + j_p$  までを取りうる。パリティは簡単で、 $\Pi_\mu = (-1)^{\pi_h + \pi_p}$  である。このような組み合わせ計算では、 $j$  を用いる代わりに磁気量子数  $m$  を使うのが便利である。一粒子状態  $j$  は、 $\Omega = 1/2, 3/2, \dots, j$  に分けられる。其々の  $\Omega$  にはさらに磁気量子数  $m = \pm\Omega$  を持つ状態 2つが含まれるため、全部で  $2j + 1$  個の一粒子状態がある。

空孔  $j_h = 1/2$  と粒子  $j_p = 5/2$  で作る 1p-1h 状態を考えてみる。空孔は  $m_h = \pm 1/2$  の 2つ、粒子は  $m_p = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2$  の 6通り存在するので、合計 12通りの組み合わせがある。1p-1h 状態の磁気量子数  $M_\mu$  は単純に  $m_p$  と  $m_h$  の和で与えられ、同じ  $M_\mu$  になる組み合わせの数を書き並べてみると、

$M_\mu$	-3	-2	-1	0	1	2	3
組み合わせ	1	2	2	2	2	2	1

と対称の分布になる。さらに別の組み合わせを追加してみよう。 $j_h = 1/2, j_p = 3/2$  の場合、 $M_\mu$  は  $-2 \leq M_\mu \leq 2$  に分布し、それぞれ 1, 2, 2, 2, 1 個の組み合わせがある。上の表に加えると、

$\sum M_\mu$	-3	-2	-1	0	1	2	3
組み合わせ	1	3	4	4	4	3	1

さらに多くの組み合わせを追加していくと、この分布は平均ゼロの Gauss 分布に近づいていくだろう。分散を  $\sigma^2 = \langle M^2 \rangle$  と書くと、ある励起エネルギーでの  $M = \sum_\mu M_\mu$  の分布  $P(M)$  は

$$P(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{M^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

と書けるだろう。これを  $J$  の分布に戻すには、 $M$  で状態数を数えた場合と  $J$  の場合の有名な関係式

$$N(J) = N(M = J) - N(M = J + 1) \quad (7)$$

を用いる。  $P(J = M) - P(J = M + 1)$  を計算し、近似を用いると次式のスピン分布が得られる [2]。

$$R(J) = P(M = J) - P(M = J + 1) \simeq \frac{J + 1/2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left\{-\frac{(J + 1/2)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (8)$$

この式は  $J$  の状態の密度であり  $\sum_J (2J + 1)R(J) = 1$  と規格化されている。実際の核反応断面積計算では、 $\sum_J R'(J) \simeq 1$  と近似された次の式も用いられる。

$$R'(J) = \frac{J + 1/2}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(J + 1/2)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (9)$$

$\sigma^2$  はスピントカットオフパラメータと呼ばれる、ここではある励起エネルギーでのスピン分布を考えたが、実際にはこの分布は励起エネルギーによって変化する。これを  $\sigma^2$  のエネルギー依存  $\sigma^2(E)$  として考慮する。

同様にパリティの分布も組み合わせ法で推定することができる。 $^{208}\text{Pb}$  の Fermi 面の上下近傍にはパリティの異なる一粒子状態があり、低い励起エネルギーを持つ 1p-1h 状態は奇パリティとなることが予想される。実際に  $^{208}\text{Pb}$  の励起状態では、最初の 10 本まで全て奇パリティとなっている。一般に励起エネルギーが高くなれば、数多くの組み合わせが同じ程度に混じってくるので、パリティの分布は 50%-50% の一定値に漸近する。

### 3. 準位密度公式

#### 3.1 現象論的モデル

一粒子準位の組み合わせを数えるだけで準位密度が計算できるほど、現実の原子核は単純ではない。特に低励起エネルギー領域では核の個性が強く現れてくるため、単純化されたモデルからのずれは大きいと考えられる。一方で Fig. 1 (b) で見たように、準位密度は指数関数的に単調に増加しているようにも見える。高エネルギーで Eq. (4) の Fermi 気体の特徴を保持しつつ、低励起状態での離散準位の観測値を再現するモデルとして有名なものに、Gilbert-Cameron の複合公式 [2] と Dilg らによる Back-Shifted Fermi Gas (BSFG) [7] の 2 つがある。

##### 3.1.1 Gilbert-Cameron の準位密度公式

Gilbert-Cameron の複合公式 [2] は、高エネルギー側では Fermi 気体模型を、低エネルギー側では定温度模型 (constant temperature model) と呼ばれるものを用い、両者をスムーズに繋いで準位密度を表す。低エネルギー側の定温度模型  $\rho_T(E)$  は以下で与えられる。

$$\rho_T(E) = \frac{1}{T} \exp\left(\frac{E - E_0}{T}\right) \quad (10)$$

ここでエネルギーのずれ  $E_0$  と温度  $T$  は、観測される離散準位を再現するように決められるパラメータである。Fermi 気体には Eq. (4) よりも詳細なものが用いられるが、準位密度パラメータ  $a$  が主たるパラメータであることには変わらない。

$$\rho_G(U) = \frac{\sqrt{\pi}}{12a^{1/4}U^{5/4}} \exp\left(2\sqrt{aU}\right) \quad (11)$$

ここで実際の励起エネルギー  $E$  では無く、 $U$  という記号を用いている。原子核の中に閉じ込められた核子には、二個ずつの対を作ろうとする性質がある。核子が偶数個あると、全ての核子是对の相手を持ち、それを引き離すために余分なエネルギーが必要となるだろう。このエネルギーを対エネルギー (pairing energy) と呼び、中性子と陽子に対する対エネルギーの和  $\Delta = \Delta(N) + \Delta(Z)$  で与えられる。原子核の励起エネルギーの一部は対を壊すのに必要であると考え、

$$U = E - \Delta \quad (12)$$

と補正したものが Fermi 気体模型の実質的な励起エネルギーとして使われる。この対エネルギーは原子核の質量公式に含まれる対エネルギーと関係している。例えば Weizsäcker-Bethe の質量公式を使うなら、偶偶核は  $\Delta = 24/\sqrt{A}$  MeV、偶奇核は  $12/\sqrt{A}$  MeV、奇奇核はゼロとなる。Kawano-Chiba-Koura の準位密度公式 [8] では、KTUY05 質量公式 [9] に含まれる対エネルギーを採用する。質量公式では偶偶核の対エネルギーをゼロとするのに対し、準位密度公式では奇奇側をゼロに取ることに注意する。

$\rho_T(E)$  と  $\rho_G(U)$  を、あるエネルギー  $E_m$  で滑らかに繋ぐ条件は

$$\left. \frac{d\rho_T(E)}{dE} = \frac{d\rho_G(E - \Delta)}{dE} \right|_{E=E_m} \quad (13)$$

と書け、この式は数値的に解くことができる。

### 3.1.2 Back-Shifted Fermi Gas 準位密度公式

Back-Shifted Fermi Gas (BSFG) [7] は、Fermi 気体模型公式をそのままゼロへ延長するものであるが、低エネルギーでのデータに合うようにエネルギーをずらす。

$$\rho_B(E) = \frac{1}{12\sqrt{2}\sigma a^{1/4}(E - \Delta + t)^{5/4}} \exp\left(2\sqrt{a(E - \Delta)}\right) \quad (14)$$

後で出てくる Eq. (18) と似ているが、分母の  $E - \Delta + t$  に次式で与えられる温度  $t$  が入っている。

$$E - \Delta = at^2 - t \quad (15)$$

BSFG は全エネルギー領域が一本の線で表現され、Eq. (13) のような手間が無く、使い勝手としてはこちらの方が良い。しかしながら  $\Delta$  は実験的に決定されるパラメータとなり、質量公式のものをそのまま持ってくるわけにはいかない。

### 3.2 準位密度の $J^\Pi$ 依存性

準位密度のスピンドistributionは Eq. (8) で与えられるが、この分布は  $\sum_J (2J + 1)R(J) = 1$  と規格化され、 $\sum_J R(J) = 1/\sqrt{2\pi}\sigma$  となることに注意する。Gilbert-Cameron の Fermi 気体模型の準位密度を  $J^\Pi$  を含んだ形に書くと

$$\rho(U, J, \Pi) = \rho_G(U)R(J)\frac{1}{2} \quad (16)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{12a^{1/4}U^{5/4}} \exp\left(2\sqrt{aU}\right) \frac{J + 1/2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left\{-\frac{(J + 1/2)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{2} \quad (17)$$



となる。パリティは偶奇同数分布していると仮定している。励起エネルギー  $U$  で「観測される」準位密度はこれを  $J^\Pi$  について和をとったもの

$$\rho_G^{\text{obs}}(U) = \sum_J \rho_G(U)R(J) = \frac{\sqrt{\pi}}{12\sigma a^{1/4}U^{5/4}} \exp(2\sqrt{aU}) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \quad (18)$$

であり、 $2J+1$  を含んだ和とは  $\sqrt{2\pi\sigma}$  の因子分だけ異なる。本来は  $2J+1$  を含めた和を全準位密度と呼び、 $\rho_G^{\text{obs}}$  は全状態密度として区別すべきかもしれないが、ここは慣習に従ってこれも準位密度と呼んでおく。

$\rho_G^{\text{obs}}$  を全準位密度としたとき、スピン依存部分は Eq. (9) の  $R'(J)$  を使って

$$\rho_G(U, J, \Pi) = \rho_G^{\text{obs}}(U)R'(J)\frac{1}{2} \quad (19)$$

となる。 $\rho_T(E)$  もやはり観測される全準位密度であるので、 $\rho_T(E, J, \Pi) = \rho_T(E)R'(J)/2$  と書け、同じ形式が使えるので便利である。

## 4. 準位密度パラメータ

### 4.1 準位密度の測定

準位密度を実験で測定する方法は幾つかあるが、代表的なものに、(1) 原子核の離散準位から外挿する方法、(2) 中性子共鳴の平均間隔を用いる方法、(3) 核子の蒸発スペクトルの形状から推定する方法がある。

#### 4.1.1 原子核の離散準位

Gilbert-Cameron 型の準位密度を考える。 $\rho_T(E)$  を Eq. (1) に代入すると

$$N(E_x) = \int_0^{E_x} \rho_T(E)dE = \exp\left(\frac{E_x - E_0}{T}\right) - \exp\left(-\frac{E_0}{T}\right) \quad (20)$$

となる。Fig. 1 (b) の破線はこれを積み上げ図に合わせてプロットしたものであり、 $E_0$  と  $T$  を決定できるので、 $\rho_T(E)$  が求まる。Eq. (13) の接続条件があり、 $\rho_G(U)$  に含まれるパラメータは一つなので、原理的には  $a$  も決定できるが、これはかなり誤差の大きな外挿となる。 $T$  と  $E_0$  についても、精度良く決定できるのは Fig. 1 の  $^{56}\text{Fe}$  のケースのように多くの準位が観測されている場合に限られる。

#### 4.1.2 中性子共鳴の平均間隔

原子核に低エネルギーの中性子が吸収される時、入射エネルギー  $E_n$  と中性子の結合エネルギー  $S_n$  の和に等しいところに複合核の準位があれば、そこで共鳴反応が起こる。再び  $^{56}\text{Fe}$  を例にとると、 $S_n = 7.6462$  MeV であり、最初の共鳴は  $E_n = 0.0278$  MeV で起こるので、励起エネルギー 7.6740 MeV に対応する準位があることが分かる。この準位は  $^{57}\text{Fe}$  のものであることに注意する。離散準位から推定する準位密度は見ている原子核そのもの ( $Z, A$ ) であるが、共鳴から求める準位密度は一つ隣の原子核 ( $Z, A+1$ ) のものである。

低エネルギー中性子なので軌道角運動量はゼロであり、標的核のスピン  $I$  に中性子の固有スピン  $s = 1/2$  を加えた  $J = I \pm 1/2$ 、さらにパリティ保存が成り立っている準位だけが複合核 ( $Z, A + 1$ ) の中に見える。 $^{56}\text{Fe}$  の場合は  $I^\Pi = 0^+$  なので、 $^{57}\text{Fe}$  の  $J^\Pi = 1/2^+$  の準位が見えていることになる。Fig. 5 は、(a) 軌道角運動量  $l = 0$  のみの寄与からなる  $^{56}\text{Fe}$  の全断面積と、(b) その共鳴のエネルギーである。共鳴の間隔がほぼ一定であれば、Fig. 5 (b) は直線的に単調増加し、その傾きが平均共鳴幅  $D_0 = 25.4 \text{ keV}$  となる。 $^{57}\text{Fe}$  の励起エネルギー  $8 \text{ MeV}$  付近に  $1/2^+$  状態が平均  $25 \text{ keV}$  間隔で分布しているの、その準位密度は  $1/D_0 = 40 \text{ MeV}^{-1}$  となる。 $\rho(8 \text{ MeV}, J = 1/2, \Pi = +) = 40$  となるように準位密度パラメータを決めてやればよい。

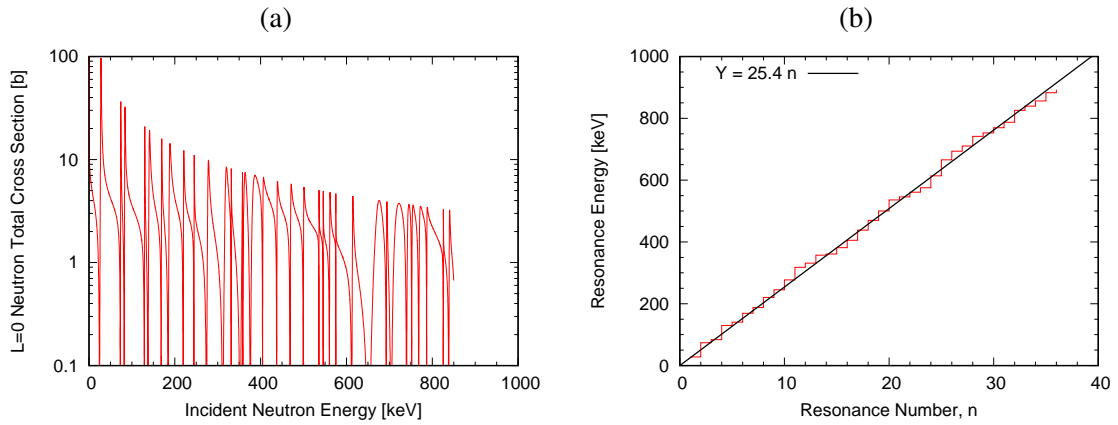


Fig 5 (a)  $^{56}\text{Fe}$  の共鳴領域の全断面積、但し s 波成分のみ。(b) 共鳴解析で得られた s 波共鳴のエネルギーと直線フィット。

#### 4.1.3 粒子蒸発スペクトル

エネルギー  $E^*$  に励起した複合核から蒸発する中性子のエネルギースペクトル  $\phi(\epsilon)$  は、以下で与えられる [10, 11]。

$$\phi(\epsilon) \propto \sigma(\epsilon)\epsilon\rho(E^* - \epsilon - S_n) \quad (21)$$

ここで  $\epsilon$  は粒子の重心系でのエネルギーである。 $\sigma(\epsilon)$  は  $E_x = E^* - \epsilon - S_n$  に励起した残留核にエネルギー  $\epsilon$  の中性子を当て、 $E^*$  の複合核を作る逆過程 (中性子吸収) の断面積であり、光学模型で計算できる。 $\phi(\epsilon)$  が実験で得られれば、残留核の準位密度が推定できる。 $\rho_T$  を Eq. (21) に代入し、 $\sigma(\epsilon)$  は一定と仮定すると、

$$\phi(\epsilon) \propto \epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon}{T}\right) \quad (22)$$

で近似でき、このスペクトルの形状から Gilbert-Cameron の公式に現れる温度パラメータ  $T$  を求めることができる [12]。

$^{56}\text{Fe}(n, n')$  反応の実験であれば、標的核  $^{56}\text{Fe}$  そのものの準位密度が得られる。但し入射エネルギーはそれなりに高くする必要があり、放出スペクトルは純粋な蒸発成分だけでなく、直接反応や前平衡過程からの寄与が含まれる。中性子入射で陽子や  $\alpha$  粒子放出反応であれば、

得られる準位密度は  $^{56}\text{Mn}$  や  $^{53}\text{Cr}$  などの残留核のものである。Fig. 6 は  $^{93}\text{Nb}$  の  $(n, xn)$  スペクトルを統計理論で計算したものである [12]。赤の実線で示された部分が Eq. (21) の蒸発スペクトルで、青の点線が Eq. (22) である。  $T = 1.02 \text{ MeV}$  として計算している。

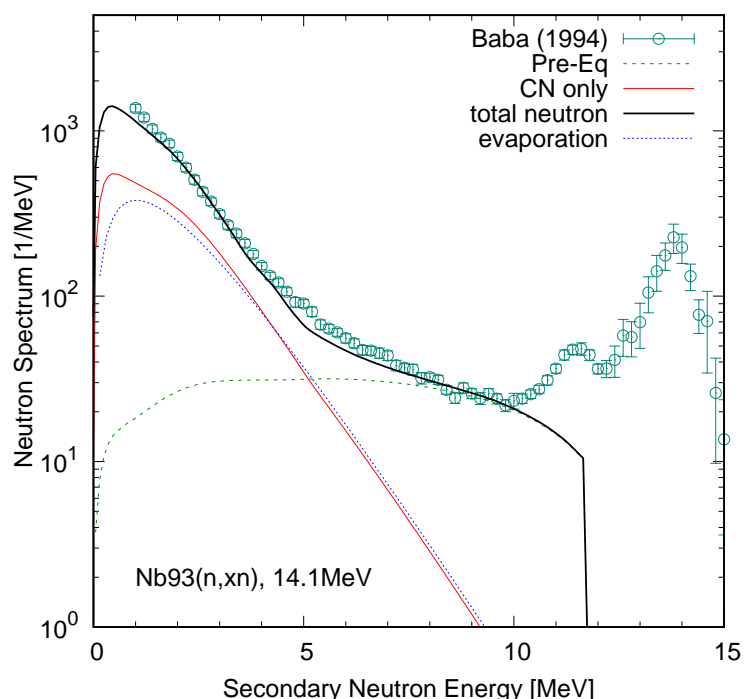


Fig 6 14 MeV 中性子による  $^{93}\text{Nb}$  からの中性子放出スペクトル [12]。破線は前平衡成分、赤い実線は複合核からの蒸発成分、青の点線は Eq. (22) の計算値で、蒸発成分程度になるよう、適当に規格化している。

## 4.2 準位密度パラメータの系統性

多くの核種に対する共鳴解析によって、s 波共鳴の平均間隔  $D_0$  の評価値が得られている [13, 14]。  $D_0$  から準位密度パラメータ  $a$  を求め、質量数の関数としてプロットしたものが Fig. 7 の紫色の  $\circ$  である。数箇所で大きな落ち込みが見えるが、ここは  $Z$  や  $N$  がマジックナンバーとなる核種に対応している。Eq. (12) では核子の偶奇効果に対エネルギーで補正したが、準位密度には殻構造の効果も考慮する必要がある。一粒子状態のエネルギーがどの程度均等に分布しているかを Fig. 2(b) で見た。階段状に表示された一粒子状態のエネルギーと曲線で示された多項式の差を合計したものを殻補正エネルギー (shell correction energy) と呼ぶ [4, 5]。中性子と陽子それぞれに対して得られるが、それらの和を  $\delta W$  と書いておく。 $^{208}\text{Pb}$  のような二重閉殻核で殻補正エネルギーは最大となる (但し負の符号に取っておく)。

原子核の励起を、粒子-空孔の対が幾つかできた状態として理解できることは述べた。対の数が増えれば原子核は元の基底状態から変化して複雑な構造となり、殻構造は薄れていくであろう。Ignatyuk らは、核の励起エネルギーが上昇するにつれて殻効果が減衰する効果を取り入れた準位密度を提案している [15, 16]。  $\delta W$  を使って Fig. 7 に手を加えよう。準位密度パ

ラメータを励起エネルギーの関数  $a(U)$  として定義し直す。

$$a(U) = a^* \left\{ 1 + \frac{\delta W}{U} (1 - e^{-\gamma U}) \right\} \quad (23)$$

ここで  $a^*$  は殻の効果が排除された漸近的準位密度パラメータ (asymptotic level density parameter) で、 $\gamma$  は減衰定数である。 $\gamma$  のとり方は人によって差があるが、 $U$  を MeV で取ったとき、 $\gamma = 0.3A^{-1/3} \sim 0.4A^{-1/3} \text{ MeV}^{-1}$  程度である。

Fig. 7 の緑色の  $\bullet$  が  $a^*$  である。マジックナンバーでの落ち込みが消え、質量数  $A$  の単調な関数として表されているのが分かる。 $a^*$  を  $A$  の関数として求めておき、核構造計算で得られる  $\delta W$  を使えば、実用的な準位密度パラメータを求めることができる。一般に現在利用されている Gilbert-Cameron や BSFG の準位密度計算と呼ばれるものは、この Ignatyuk の補正も含んだものである。 $a^*$  は用いる殻補正エネルギーに依存し、そのエネルギーも模型、特に原子核の質量公式依存である。現象論的な補正であるので、同じ Ignatyuk の補正を取り入れた準位密度であったとしても、そこで使用されるパラメータは異なる場合が多い。

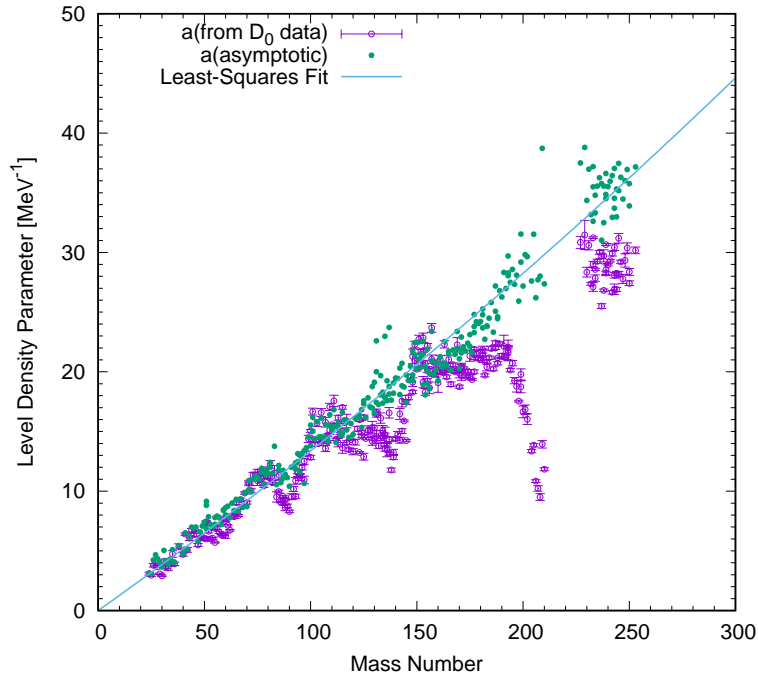


Fig 7  $D_0$  から求めた準位密度パラメータ (○) と、殻エネルギーの補正を加えたもの (●)。直線は殻エネルギー補正された準位密度パラメータを最小二乗法でフィットしたものである。

## 5. 準位密度の微視的モデル

本稿の範囲を超えるが、微視的模型による準位密度計算について少し述べておく。Hartree-Fock-Bogoliubov 計算や FRDM(Finite-Range Droplet Model) [17, 18] で得られた一粒子準位スペクトルを用い、組み合わせ計算から準位密度を求める方法がある [19, 20]。組み合わせを

数えただけでは実際の準位密度にはならないので、BCS などを使った補正が加わる。実際に断面積計算に応用する場合、補正はしばしば現象論的なものとなる [21]。

大規模な殻模型 (shell model) 計算を行えば、原理的には励起準位を全て得ることは可能である。そのエネルギーが正確に分からなくとも、準位の分布は求めることができる [22]。Alhassid ら [23] は Monte Carlo 法を用いて準位密度を微視的に求める方法を開発している。Shimizu ら [24] は Krylov subspace(クリロフ部分空間)法を利用して、大規模殻模型計算の固有値の数を推定する方法を提案している。大規模な計算になることや、模型計算からの制約もあるが、こういった手法が本来の意味での微視的計算と言える。

## 6. おわりに

原子核の統計的な性質の一つである準位密度について、その簡単な考え方から現象論的な模型について概説した。核データニュース向けの解説記事であるので、あまり込み入った話にならないよう、厳密な定義等については端折り、またスピン分布についても簡単に触れるに留めておいた。Gilbert-Cameron の論文 [2] は今から 50 年以上前に書かれたものであるが、本稿での基本的な考え方はそこに書かれているので、一読をお勧めする。

統計模型計算に使われる準位密度は全ての準位を含んだものであるが、前平衡過程の計算には 1p-1h, 2p-2h 等の部分準位密度が現れる。これについても本稿では概念的な紹介に留めることとした。実際の原子核の、特に低励起エネルギーでの準位の分布は、核構造に大きく影響される。原子核が変形している場合、あるいは核表面の振動が起こる場合、そういう集団運動で準位密度がどう変化するか等、準位密度に関連した課題はまだ多く残されている。準位密度をいかに精度良く計算するかは、模型計算で予測される未知の核反応断面積の精度向上と直接結びついている。

## 参考文献

- [1] R. Firestone, *Table of Isotopes, Eighth Edition*, John Wiley & Sons Inc. (1996).
- [2] A. Gilbert and A. Cameron, *Can. J. Phys.*, **43**, 1446 (1965).
- [3] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, World Scientific, (1998).
- [4] V. Strutinsky, *Nucl. Phys. A*, **122**, 1 (1968).
- [5] M. Bolsterli, E. O. Fiset, J. R. Nix, and J. L. Norton, *Phys. Rev. C*, **5**, 1050 (1972).
- [6] T. Kawano and S. Yoshida, *Phys. Rev. C*, **64**, 024603 (2001).
- [7] W. Dilg, W. Schanil, H. Vonach, and M. Uhl, *Nucl. Phys. A*, **217**, 269 (1973).
- [8] T. Kawano, S. Chiba, and H. Koura, *J. Nucl. Sci. Technol.*, **43**, 1 (2006).
- [9] H. Koura, T. Tachibana, M. Uno, and M. Yamada, *Prog. Theor. Phys.*, **113**, 305 (2005).
- [10] V. Weisskopf, *Phys. Rev.*, **52**, 295 (1937).

- [11] V. F. Weisskopf and D. H. Ewing, *Phys. Rev.*, **57**, 472 (1940).
- [12] T. Kawano, P. Talou, I. Stetcu, and M. Chadwick, *Nucl. Phys. A*, **913**, 51 (2013).
- [13] S. F. Mughabghab, *Atlas of Neutron Resonances, Resonance Parameters and Thermal Cross Sections, Z=1–100*, Elsevier (2006).
- [14] R. Capote, M. Herman, P. Obložinský, P. G. Young, S. Goriely, T. Belgya, A. V. Ignatyuk, A. J. Koning, S. Hilaire, V. A. Plujko, M. Avrigeanu, O. Bersillon, M. B. Chadwick, T. Fukahori, Z. Ge, Y. Han, S. Kailas, J. Kopecky, V. M. Maslov, G. Reffo, M. Sin, E. S. Soukhovitskii, and P. Talou, *Nucl. Data Sheets*, **110**, 3107 (2009).
- [15] A. Ignatyuk, G. Smirenkin, and A. Tishin, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **21**, 255 (1975).
- [16] A. Ignatyuk, K. Istekov, and G. Smirenkin, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **29**, 450 (1979).
- [17] P. Möller, J. R. Nix, W. D. Myer, and W. Swiatecki, *At. Data and Nucl. Data Tables*, **59**, 185 (1995).
- [18] P. Möller, A. J. Sierk, T. Ichikawa, and H. Sagawa, *At. Data and Nucl. Data Tables*, **109**, 1 (2016).
- [19] S. Hilaire, C. Lagrange, and A. J. Koning, *Ann. Phys.*, **306**, 209 (2003).
- [20] H. Uhrenholt, S. Åberg, A. Dobrowolski, T. Døssing, T. Ichikawa, and P. Möller, *Nucl. Phys. A*, **913**, 127 (2013).
- [21] S. Goriely, S. Hilaire, and A. J. Koning, *Phys. Rev. C*, **78**, 064307 (2008).
- [22] R. Sen'kov, V. Zelevinsky, *Phys. Rev. C*, **93**, 064304 (2016).
- [23] Y. Alhassid, M. Bonett-Matiz, S. Liu, and H. Nakada, *Phys. Rev. C*, **92**, 024307 (2015).
- [24] N. Shimizu, Y. Utsuno, Y. Futamura, T. Sakurai, T. Mizusaki, and T. Otsuka, *Phys. Lett. B*, **753**, 13 (2016); *EPJ Web of Conferences*, **122**, 02003 (2016).